Naivní teorie množin

Definice: Množina je každý soubor M určitých rozlišitelných objektů m našeho nazírání nebo myšlení shrnutých v celek.

Georg Cantor (1845 – 1918) – zakladatel teorie množin.

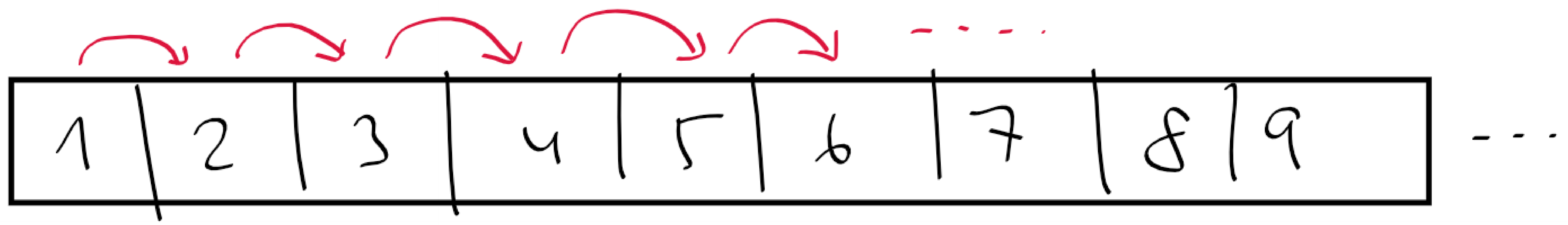
Jde v podstatě o práci s pojmem nekonečna. Cantor: různě velká nekonečna

Příklady: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$,

$\{T \subseteq \mathbb{R}^2 : T \text{ je trojúhelník}\}$

$\{p \in \mathbb{N} : p \text{ je prvočíslo}\}$

- délka přímky, „počet všech množin“
- Hilbertův hotel:



$\forall n \in \mathbb{N}$: máme 1 pokoj s číslem n.

Plně obsazen: $\forall n$: pokoj n obsazen.

Řešení: Host z $n \to$ do $n+1$. nového hosta do pokoje 1.

Přijede-li ∞-mnoho (spočetně) turistů: Řešení: $n \to 2n$

Co znamená, že 2 množiny A, B „mají stejné prvky"?

Odpověď: • konečné množiny:

$$|A| = m \in \mathbb{N}$$
$$|B| = n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{Píšeme: } A \approx B}$

A a B mají stejnou mohutnost, jestliže $m = n$.

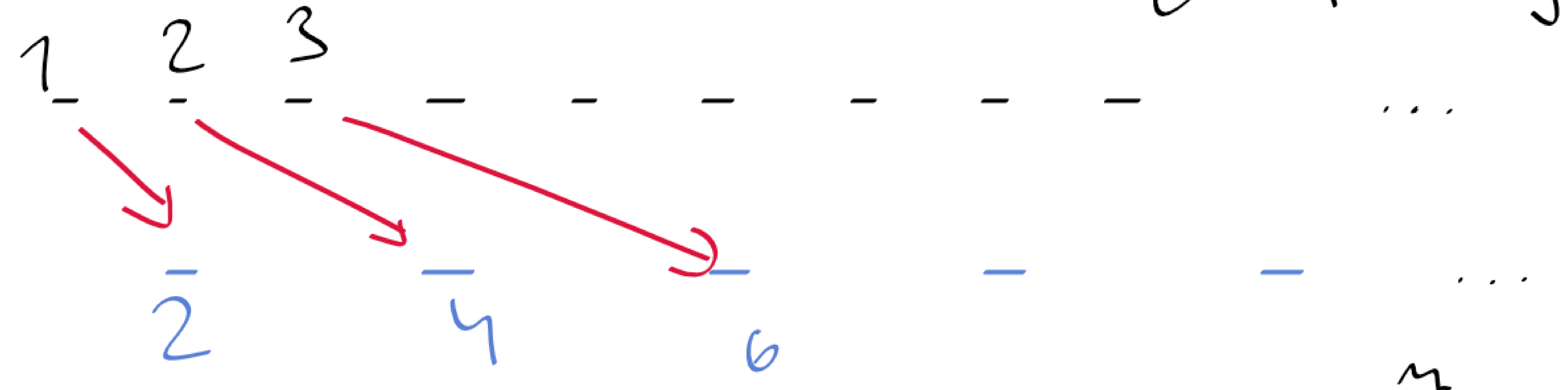
• nekonečné množiny:

A a B mají stejnou m., jestliže existuje bijekce mezi A a B.

Příklad: • $\mathbb{N} \approx \underbrace{\{k \in \mathbb{N} : 2 | k\}}_{S}$

$f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} S$

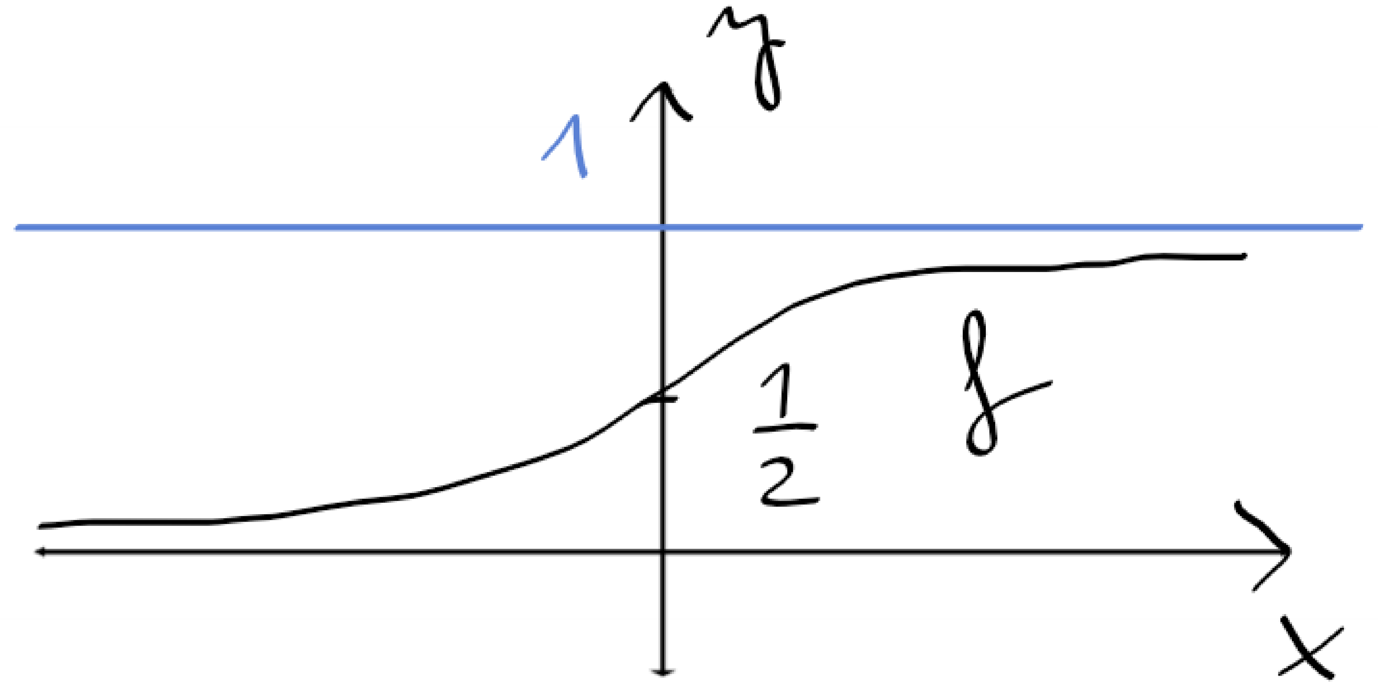
$f(n) = 2n$. (Prostota ✓, surjekt. ✓)



• $\mathbb{R} \approx (0,1)$

$f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} (0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)$$



• neplatí $\mathbb{N} \approx \mathbb{R}$.

Platí $\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$.

(Cantor)

Důkaz: Sporem: Kdyby $\exists$ bijekce $f: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$, pak posl. $(f(n))_{n=1}^{\infty}$ obsahuje jedno každé $\mathbb{R}$-číslo.

Můžeme si tedy představit pod sebou zapsané 10-tinné rozvoje čísel $f(1), f(2), f(3), \dots$

Tvrdím, že a není na seznamu:

tj. $\forall n \in \mathbb{N}: a \neq f(n)$.

[Od $f(n)$ se a liší v n-té cifře.]

SPOR: s tím, že f je na. ⊠

0,	1	2	7	6	0	0	...	$f(1)$
0,	0	0	0	3	6	9	...	$f(2)$
0,	1	4	1	5	9	2	...	$f(3)$
0,	7	1	8	2	8	1	...	$f(4)$
⋮							⋱	

b_1 b_2 b_3 b_4 ...

Diagonála ∞-ná

Utvoříme číslo $a \in \mathbb{R}$ jako

$0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$, a to

tak, že $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ atd.

(dáme pozor na $\dots 99\bar{9}$).

„nekonečna jsou různých velikostí"

Příklad: Hyper-Webster je hypot. slovník obsahující všechny konečné posl. zákl. znaků (abeceda, čísla, mezery ... máme kon. sadu znaků). SA

Svazek A: „obsahuje celý Hyper-Webster": stačí u všech hesel škrtnout přáteční písmeno A.

Buď $(z_n)_{n=1}^{N} \in HW$

Pak $(A, z_1, z_2, \ldots, z_N) \in HW$

a protože začíná písmenem A,

tak $\in$ SA.

Příklad: „nekonečně malé veličiny"

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{„} = \frac{df(x)}{dx} \text{"}$$

diferenciály jsou „nekonečně malé veličiny

Pozn.: Hilbertův hotel v analýze 1. SEM.:

Aritmetika na $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

$\infty + 1 = \infty$ ✓

$\infty + \infty = \infty$ ✓

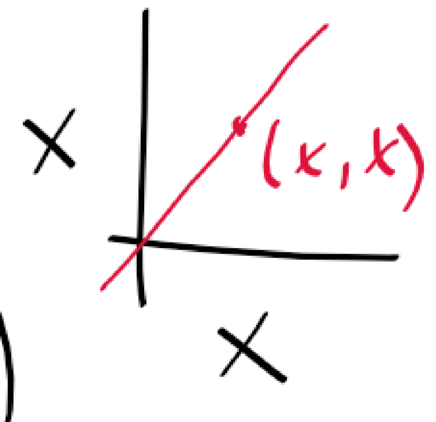
$\infty \cdot \infty + \infty = \infty$ ✓

Opakování zákl. pojmů

- kartézský součin množin A a B je $A \times B \overset{def.}{=} \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$.
- relace na množině X: $R \subseteq X \times X$.

Značení: $(a,b) \in R$ píšeme aRb.

- R je reflexivní $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x \in X : xRx$. $((x,x) \in R)$



- R je symetrická $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x,y \in X : xRy \longrightarrow yRx$
- R je tranzitivní $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x,y,z \in X : xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$.
- R je (slabě) antisymetrická $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x,y \in X : xRy \wedge yRx \longrightarrow x = y$
- R je (silně) antisymetrická $\overset{def.}{\iff}$ $\forall x,y \in X : xRy \longrightarrow \neg yRx$

- Relace R na X je ekvivalence (na X), pokud je reflexivní, symetrická a tranz.